

Numeri, geometria, arte

Francesco Tampieri, CNR ISAC, Bologna
francesco.tampieri@unibo.it

9 gennaio 2014

1 Premessa: il progetto *Il linguaggio della ricerca*

Il progetto e' iniziato nel 2003, e si sviluppa grazie alla collaborazione tra gli Istituti del Consiglio Nazionale delle Ricerche presenti nell'Area di Bologna e le scuole di Bologna e provincia (ma non solo). Lo scopo del progetto e' condurre gli studenti ad elaborare un prodotto di divulgazione scientifica (in italiano e in inglese) partendo da un incontro/conversazione con ricercatori, da un lato, e con un esperto/giornalista in comunicazione scientifica.

Il prodotto puo' essere presentato su un qualunque supporto (medium), dalla carta al web, e non necessariamente riguarda l'argomento della conversazione, che vuol essere solamente uno stimolo iniziale.

Per avere ulteriori informazioni: www.bo.cnr.it/linguaggiodelларicerca/

2 Il problema del linguaggio

Il punto critico di questa conversazione e' il linguaggio, o meglio la pluralita' dei linguaggi. Il linguaggio matematico e' fortemente formalizzato, il linguaggio comune molto meno. Il mio (e anche vostro) tentativo consiste nel trovare argomenti specifici di cui poter parlare usando 'la stessa lingua'.

Una situazione comune: molte persone sostengono di non capire la matematica o la fisica; presumibilmente altrettanti sostengono di non comprendere l'arte moderna (forse l'arte senz'altro).

Quindi, diciamo che la predisposizione e' un dono di natura, e la specializzazione frutto di studi approfonditi (forse meglio se fatti da chi ha una predisposizione naturale all'argomento); ma una comprensione degli aspetti fondamentali di qualsiasi manifestazione del pensiero umano e' una faccenda di addestramento e di reciproca accettazione.

Naturalmente ci sono esempi di persone che sono state capaci di eccellere in campi estremamente diversi, soprattutto nel passato (quando le cose erano piu' semplici?): subito si pensa a Leonardo. Il mio obiettivo e' dunque di offrire spunti e di esplorare intrecci e collegamenti, per capire fino a che punto possiamo parlare di terreno comune e da dove incominciano le difficolta' a comunicare.

Per cominciare, prendete in considerazione la fig. 2: e' la tavola d'apertura del trattato 'Apiaria universae philosophiae mathematicae' di M. Bettini, pubblicato a Bologna nel 1642, e condensa nozioni matematiche, fisiche, astronomiche ed ingegneristiche in un giardino ideale popolato da api operose.



Figura 1: L'Area della Ricerca del CNR di Bologna, via Gobetti 101. Progetto di Ezio Zacchioli (1988-1995).

2.1 Dichiarazioni programmatiche e citazioni varie

Qui ho raccolto qualche citazione rilevante per il nostro argomentare.

Una prima citazione¹ sottolinea l'esistenza di un terreno comune: nel Primo Manifesto Spaziale Lucio Fontana scrive: "Ci rifiutiamo di pensare che scienza ed arte siano due fatti distinti, che cioè i gesti compiuti da una delle due attività possano non appartenere anche all'altra. Gli artisti anticipano gesti scientifici, i gesti scientifici provocano sempre gesti artistici."

Importante è anche evitare confusioni²: "Gabo (una sua opera: fig. 3) fa ricorso a un parallelo tra arte e scienza ... : Possiamo trovare un efficace supporto al nostro ottimismo nei due campi culturali dove la rivoluzione è stata più profonda, cioè nella scienza e nell'arte (da Dopo il cubismo, un testo del 1918). Criticando il luogo comune sul cubismo secondo cui questa nuova arte rappresentava una illustrazione della teoria della relatività di Einstein, Gabo diffida di qualunque analogia pseudomorfa tra i prodotti dell'arte e quelli della scienza. L'arte e la scienza non debbono essere legate in maniera diretta, ma condividono una comune visione del mondo e una ricerca delle leggi universali."

Una citazione da Max Bill³ che rivendica l'autonomia del proprio lavoro, chiarendo il suo rapporto con la scienza: "The mathematical approach in today's art is not actually mathematics. It is the design of rhythms and relationships, of laws with an individual origin, just as mathematics originates in the individual thinking of pioneering mathematicians. "

Una considerazione sui linguaggi, fatta da un fisico⁴ che mi sembra un po' scettico sulla effettiva possibilità di comunicare concretamente: "... si riscontra lo sviluppo di un altro

¹tratta dal testo di Maura Pozzati nel catalogo di Luca Pozzi. Set properties. Galleria 42, Modena, 2007.

²Foster et al. (2006, pag. 287)

³Schneckenburger (2000)

⁴Bernardini (2007, pag.18)

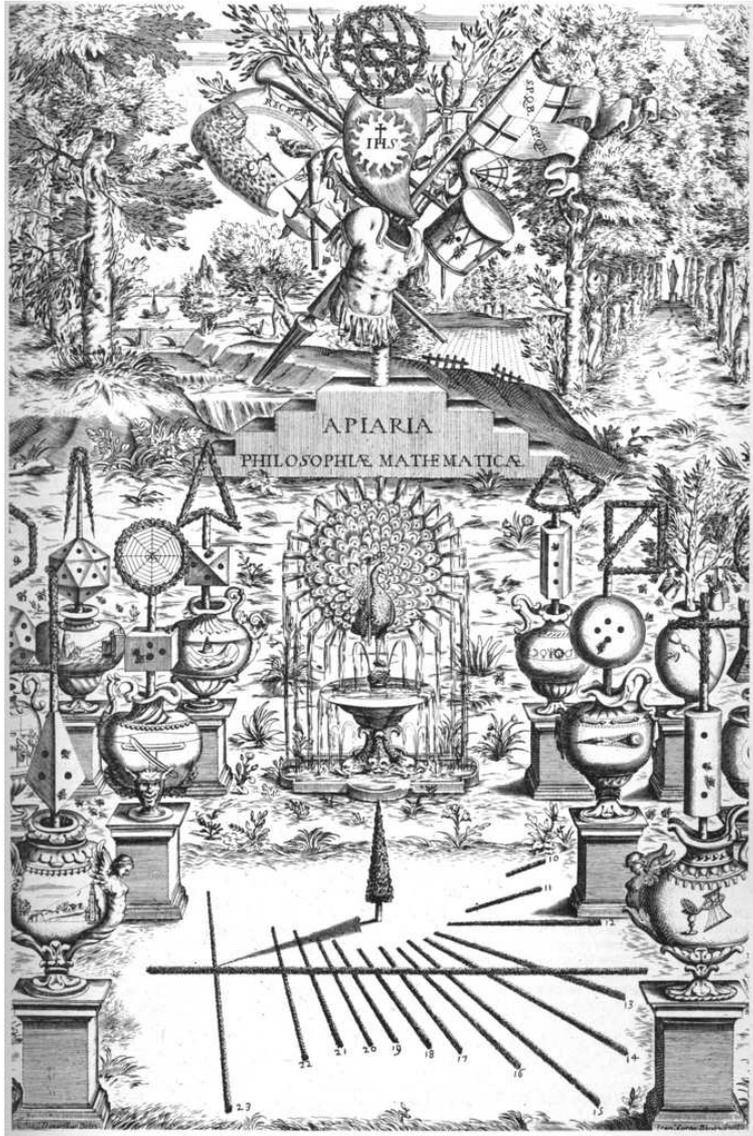


Figura 2: Frontespizio del trattato 'Apiaria universae philosophiae mathematicae', M. Bettini, Bologna, 1642. Da Ricci (1963).

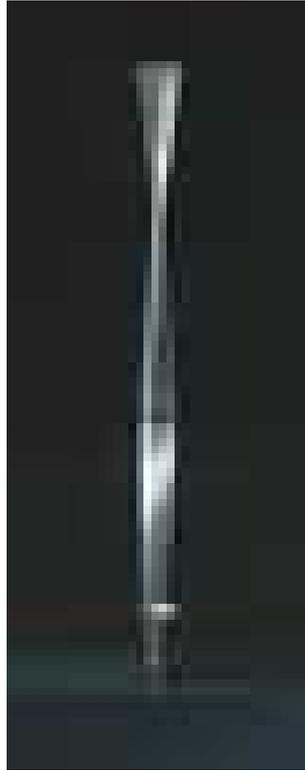


Figura 3: Naum Gabo. Kinetic Construction (Standing Wave). 1919-20, replica 1985. Metal, painted wood and electrical mechanism. Object: $616 \times 241 \times 190$ mm. Presented by the artist through the American Federation of Arts, 1966. In the aftermath of the Russian Revolution, when this work was made, materials were hard to come by. 'It was the height of civil war, hunger and disorder in Russia. To find any part of machinery ... was next to impossible', said Gabo. Originally made to demonstrate the principles of kinetics to his students, it reflects the artist's belief in a sculpture in which space and time were active components. A strip of metal is made to oscillate so that a standing wave is set up. This movement in real time creates the illusion of volumetric space.

linguaggio (che chiamero' di elaborazione) via via piu' evoluto e trasmissibile, diverso da quello di uso comune (che chiamero' di comunicazione).

I due linguaggi differiscono profondamente: il linguaggio di comunicazione serve per la formulazione di registrazioni memorizzabili di informazioni (fatti, opinioni, idee), nell'impiego soggettivo; e per lo scambio di quelle informazioni, nell'impiego intersoggettivo. Il linguaggio di elaborazione, invece, usa le informazioni, particolarmente quelle della realta' circostante, per elaborarle secondo procedure concepite e collaudate al fine di conseguire risultati non contenuti gia' nelle informazioni di partenza.

Il primo ... e' essenzialmente un linguaggio proposizionale ... Il linguaggio di elaborazione ... e' essenzialmente un linguaggio formale, simbolico ... , che, usando regole di manipolazione logica rende manifesta una conclusione verificabile degli assunti di partenza ... "



Figura 4: Roman Opalka. Detail. 1965. Acrylic on canvas, $196 \times 135\text{cm}$.

3 I numeri

3.1 I numeri naturali, lo scorrere del tempo e l'infinito

I numeri costituiscono l'inizio del nostro ragionamento. Cominciamo dalla sequenza più banale, quella dei numeri naturali: ogni numero è generato da quello che lo precede, più una unità'. In formula:

$$I_n = I_{n-1} + 1 \quad (1)$$

Nella sua banalità, questa relazione ci fornisce un esempio di regola 'evolutiva', e ci dice anche che la sequenza dei numeri naturali è infinita: possiamo pensarne uno grande quanto ci pare, e la regola ci insegna a generarne il successivo.

3.1.1 Roman Opalka

Dunque la sequenza dei numeri naturali è un modello naturale dello scorrere del tempo: ed è proprio di questo modello che fa uso Roman Opalka per il suo lavoro⁵ " OPALKA 1965/1 - ∞ " (un dettaglio in fig. 4).

3.1.2 Constantin Brancusi e Michelangelo Pistoletto

Nella ripetizione di elementi uguali (le unità) abbiamo individuato il modello di infinito. La colonna senza fine di Constantin Brancusi (Targu Jiu, Romania, 1876-1957) utilizza appunto questa idea: fig. 5.

Una citazione da Brancusi stesso: "The people who call my work 'abstract' are imbeciles; what they call 'abstract' is in fact the purest realism, the reality of which is

⁵"Artist Roman Opalka has painted 'time' exclusively since 1965. Not using symbols as clocks or calendar dates, he paints a sequence of numbers to represent the passing of time. The canvas size, height and style of digits never changes. Opalka has now passed the five million mark with over 200 paintings, spending more than half of his life on this single oeuvre. It will be completed only when he dies. He records the numbers as he counts in Polish, his mother tongue, and photographs his face at the end of each day's painting session. The number paintings, photos, sound and texts are all elements Opalka uses for his installations on time. The name of this art work is: OPALKA 1965/1 - ∞

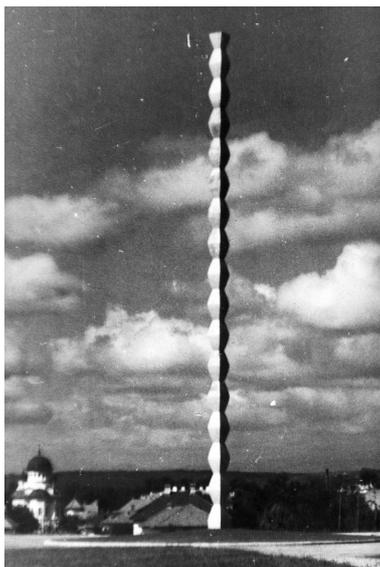


Figura 5: Constantin Brancusi. Endless column. Targu Jiu, Romania.

not represented by external form but by the idea behind it, the essence of the work." ci suggerisce quanto siano concreti i numeri, per estensione la matematica!

Puo' venire istintivo cercare di contare le riflessioni sugli specchi, rendendosi presto conto della vanità del tentativo: ancora una volta, la ripetizione ci suggerisce l'infinito, nel lavoro di Michelangelo Pistoletto: fig. 6.

3.1.3 Zenone

Le riflessioni negli specchi di Pistoletto sono innumerevoli. Ad uno sguardo attento non sono proprio tutte uguali, piuttosto vanno attenuandosi (in effetti la radiazione visibile viene un poco assorbita ad ogni riflessione: gli specchi reali non possono dare luogo a infinite riflessioni). Questo ci da' uno spunto per ricordare il paradosso di Zenone, che nasce dall'esigenza dell'uomo di ragionare sui fondamenti della propria conoscenza, in questo caso dell'aritmetica e della logica.

Zenone di Elea, allievo di Parmenide, vissuto nel V secolo AC, manipola la logica e la somma di infiniti elementi per dimostrare l'impossibilità del movimento (la freccia che scoccata verso un bersaglio copre metà del percorso in un dato tempo, poi metà del rimanente percorso in un intervallo di tempo minore ma finito, poi ancora metà del percorso rimanente e così via; sembra si possa continuare a dimezzare senza mai trovare una conclusione del tipo: lo spazio rimanente è zero). Zenone con un argomento analogo tenta anche di mostrarci che Achille non potrà mai raggiungere la tartaruga che si muove nella sua stessa direzione, se è partito con un handicap anche piccolo, ma finito.

Questo è un paradosso che verte sul calcolo di somme di infiniti addendi, la cui misura è sempre piu' piccola (a differenza della formula 1). La soluzione al paradosso sta nella comprensione delle serie convergenti e del concetto di passaggio al limite (tutte cose che Zenone non conosceva).

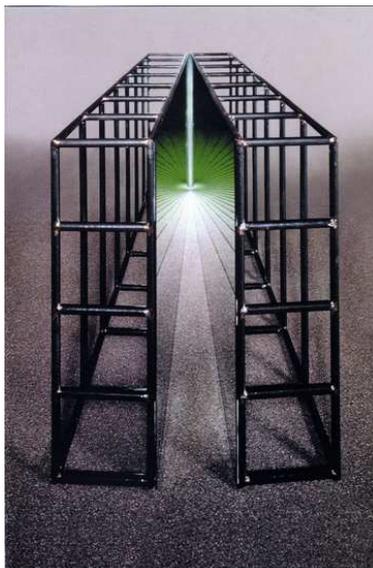


Figura 6: Michelangelo Pistoletto. Installazione per la mostra Codice Inverso, Citta' di Castello, 2001.

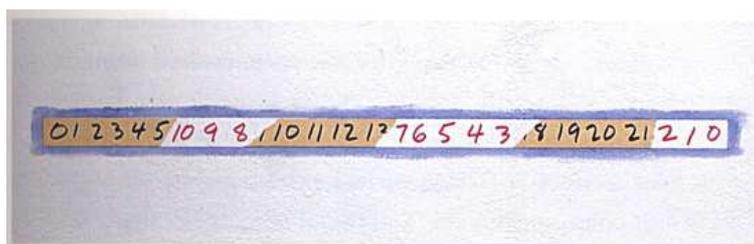


Figura 7: Mel Bochner. Test Piece for Continuous/Dis/Continuous, 1971-72.

3.1.4 Mel Bochner, Hanne Darboven, ...

Concludo queste considerazioni su numeri naturali ed artisti citando le serie numeriche crescenti e decrescenti di Mel Bochner ⁶: figura 7; oppure i numeri in sequenze personali utilizzati da Hanne Darboven⁷: figura 8. Queste opere mostrano l'uso del numero in quanto tale o come paradigma di strumento ordinatore.

3.2 I numeri di Fibonacci come modello di un processo naturale di crescita

Leonardo Pisano, detto Fibonacci, cioè filius Bonaccii (Pisa, 1170-1245 circa), fu tra i più grandi matematici del Medioevo⁸.

⁶Zelevansky (2004, pag. 26-27)

⁷Vettese (1998, pag. 216)

⁸Notizie sulla sua vita si trovano in Abate (2006), oppure in aa. vv. (2007). In breve, Leonardo Fibonacci fu istruito nella numerazione oggi detta araba sin dall'infanzia, a Bugia presso Algeri, dove il padre era impiegato in dogana per conto dei mercanti pisani. Viaggiando ebbe modo di conoscere le opere di Euclide e dei matematici arabi. Più avanti negli anni si stabilì a Pisa, dove ricoprì tra l'altro la carica di revisore dei libri dei conti del Comune. Nel suo *Liber abbaci* (1202) espone la numerazione posizionale (già



Figura 8: Hanne Darboven. K: 15×15 - F: 15×15 (Organizer 1), 1972-73, particolare.

Il suo nome è indissolubilmente legato a questo problema:

" un uomo mette una coppia di conigli in un luogo recintato. Quante coppie di conigli saranno generate in un anno dalla prima coppia se si suppone che ogni mese ciascuna coppia generi una nuova coppia che richiede due mesi per diventare fertile? "

Per risolvere il problema di Fibonacci e' comoda una scrittura formale. Eccola.

Il numero di coppie F_n presenti nel mese n e' uguale al doppio delle coppie gia' presenti nel mese $n - 2$ piu' le coppie nate nel mese $n - 1$, diciamo N_{n-1} :

$$F_n = 2 F_{n-2} + N_{n-1} \quad (2)$$

Le coppie nate nel mese $n - 1$ sono pari alla differenza tra quelle presenti nel mese stesso e quelle presenti nel mese precedente

$$N_{n-1} = F_{n-1} - F_{n-2} \quad (3)$$

e sostituendo questa espressione per N_{n-1} nella eq. 2 si ha

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (4)$$

L'eq. 4 è la soluzione del problema. Anche questa è una formula generativa: ogni numero di Fibonacci è dato dalla somma del suo predecessore, e dal predecessore del predecessore (per avviare il processo di generazione di questi numeri, ci occorrono due valori iniziali, F_1 e F_2 , entrambi uguali a 1, il numero delle coppie nei primi due mesi. Nel caso dei numeri naturali, eq. 1, occorre un solo valore iniziale).

Questi sono i primi sette valori della sequenza di Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \quad (5)$$

adottata dagli arabi, e fino a quel momento praticamente sconosciuta in Europa), e tratta una quantita' di problemi: operazioni tra i numeri, frazioni, equazioni algebriche di secondo grado, le cui soluzioni si trovano in altri testi, scritti in occasione di dispute con il matematico Giovanni da Palermo, alcune pare tenute in presenza di Federico II (1225). Nel *Liber abaci* si trovano poi elementi di computisteria e di ragioneria, tra i quali norme per la tenuta di chiari libri contabili.



Figura 9: Mario Merz. Manica lunga da 1 a 987, 1990. 16 numeri al neon, h 15 cm ciascuno, installazione 147 m. Castello di Rivoli.

3.2.1 Mario Merz

I numeri di Fibonacci sono stati utilizzati da Mario Merz (Milano, 1925 - 2003)⁹, in opere a partire dal 1970, quando pubblica il libro d'artista *Fibonacci*¹⁰. Merz è consapevole del modello evolutivo sotteso dalla sequenza numerica e la usa come paradigma dell'energia insita nella materia vivente.

In molte opere l'artista utilizza direttamente i numeri di Fibonacci: fig. 9¹¹ e fig. 10.

3.3 E concludendo il nostro ragionamento sui numeri ...

Abbiamo visto alcune formule (le eq. 1 e 4) che generano sequenze di numeri. Abbiamo constatato di non saper costruire una regola generale che fornisca la sequenza dei numeri primi (tuttavia sappiamo costruire, empiricamente, la sequenza, passo dopo passo).

⁹Vettese (1998, pag.233)

¹⁰Poli (1995, pag.131-132)

¹¹aa. vv. (2000, pag.190): " cosi' la sequenza si allunga , ma anche si dilata rapidamente come la crescita di un organismo vivente./ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55..../ la fine di questa operazione/ come si capisce non esiste .../ ma nella macroscopia della dilatazione si rinnova il fermento organico dello sviluppo come proliferazione./ Essi versano lo spazio in uno spazio piu' grande che e' lo spazio infinito."



Figura 10: Mario Merz. Torino, Mole Antonelliana.

Vorrei farvi notare qualcosa sul tasso di crescita di queste sequenze. Tanto per aggiungere un piccolo tassello al ragionamento, costruiamo anche la formula che genera la superficie Q_n di un quadrato di lato pari al numero intero n , in termini della superficie del quadrato di lato $n - 1$ (il suo predecessore):

$$Q_n = Q_{n-1} + 2\sqrt{Q_{n-1}} + 1 \quad (6)$$

Nella Figura 3.3 ho riportato la sequenza dei numeri naturali I_n , che crescono come una retta (banale!), quella dei quadrati Q_n , quella dei numeri di Fibonacci F_n e quella dei numeri primi.

Vedete che i numeri primi crescono in maniera intermedia tra naturali e quadrati, mentre il processo naturale descritto dalla sequenza di Fibonacci è 'esplosivo' e, se volete, questo ha a che fare con la scelta di Merz.

4 Poligoni e poliedri

Le forme piane della geometria euclidea e l'arte si intrecciano, a partire dalla forma più classica del supporto, quadrato o rettangolo. Scegliendo qua e là, ecco un'associazione mentale 'classica' ed una un po' meno.

4.1 Due rettangoli ed una spirale

4.1.1 La sezione aurea

Il rettangolo aureo compare nella geometria¹² e nell'arte fin dai tempi della Grecia classica. Alla sezione aurea vennero attribuite proprietà di carattere estetico, che hanno ovviamente

¹²Euclide, vissuto ad Alessandria attorno al 300 AC, dimostrò che la sezione aurea del segmento a è il lato del decagono regolare iscritto in una circonferenza di raggio a .

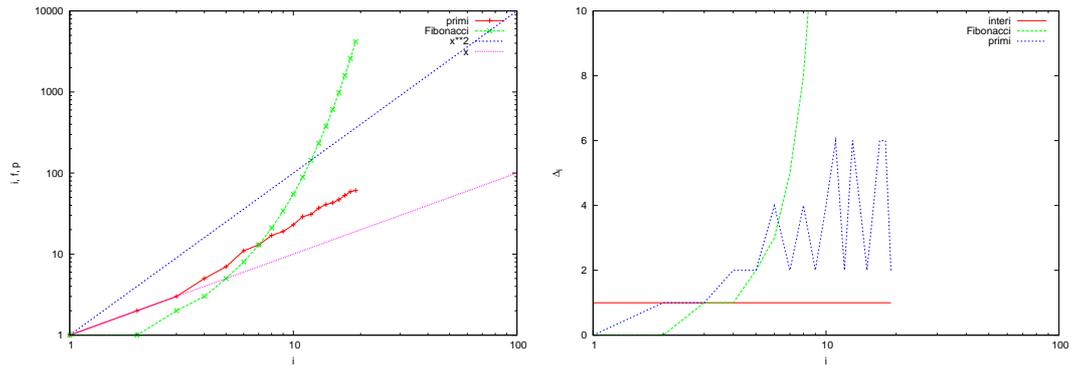


Figura 11: Numeri naturali, quadrati, numeri di Fibonacci, numeri primi (a sinistra). Tassi di crescita (a destra).

a che fare piu' con il gusto che con le formule.

La sezione aurea x di un segmento di lunghezza a e' definita come il medio proporzionale tra a stesso e la differenza $a - x$: in formula

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \quad (7)$$

Si puo' trovare la soluzione scrivendo l'equazione di secondo grado

$$x^2 = a(a - x) \quad (8)$$

ovvero

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \quad (9)$$

Risolvendo l'equazione si trova

$$x = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) \simeq 0.618a \quad (10)$$

L'aspetto interessante e' che la sezione aurea del segmento x e' esattamente $a - x$. Si puo' infatti scrivere nuovamente la definizione di sezione aurea:

$$\frac{x}{a - x} = \frac{a - x}{x - (a - x)} \quad (11)$$

e l'equazione di secondo gradi che se ne ricava e' identica alla precedente

$$(a - x)^2 = x(2x - a) \quad (12)$$

ovvero

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \quad (13)$$

Ho ottenuto la stessa equazione di prima!

Graficamente questo significa che un rettangolo aureo, i cui lati sono di lunghezza a ed x , ne genera un'altro togliendogli un quadrato, e questo allo stesso modo ne genera un'altro, e cosi' via all'infinito: guardiamo la fig. 12 per lo schema, e la fig. 13 per la sua applicazione tradizionale forse piu' famosa.

Se provate a immaginare di tracciare opportuni archi di circonferenza entro i quadrati ottenete una spirale: la spirale aurea, che e' caratteristica di processi di crescita naturali.

Tra l'altro, la spirale aurea e' imparentata con i numeri di Fibonacci: ed ecco la sintesi operata, ancora una volta, da Mario Merz, per esempio in "Lumaca", fig. 14 ¹³

¹³aa. vv. (2000, pag. 182): " la lumaca/ ruota la spirale sui leggeri cardini dei numeri/

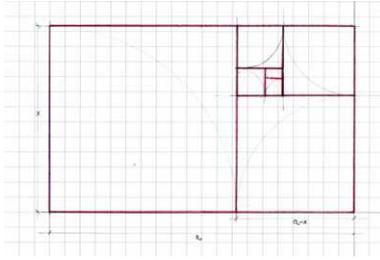


Figura 12: Rettangoli aurei



Figura 13: Piero della Francesca. La flagellazione. c. 1469. Olio e tempera su tavola, 58.4×81.5 cm; Galleria Nazionale delle Marche, Urbino.

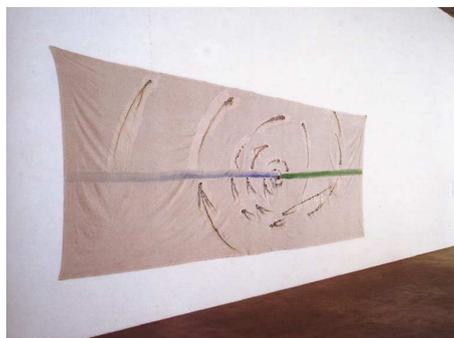


Figura 14: Mario Merz. Lumaca, 1976. Creta, tempera, vinavil, guscio di chiocciola su tela, 230×555 cm. Castello di Rivoli.



Figura 15: Max Bill. Grafica (da Exacta).

4.2 Infiniti poligoni regolari

I poligoni regolari hanno lati ed angoli interni uguali, se ne possono costruire infiniti, ciascuno con un lato in più rispetto al precedente, a partire dal triangolo equilatero.

Guardando l'immagine di Max Bill (figura 15) si individua facilmente la regola di 'costruzione' dell'immagine. L'iterazione suggerisce l'idea di infinito: l'infinito numero di poligoni regolari. Mi piace pensare che sia un artista a dare tanta pregnanza a questa affermazione da matematico.

4.2.1 Quadrati, quadrati,

Il quadrato ha sicuramente stimolato l'immaginario degli artisti. Ho compilato un piccolo excursus, sulla traccia di una tesi dell'Accademia¹⁴.

Nel disegno di Leonardo, fig. 16, il quadrato modula le proporzioni del corpo umano ed idealmente collega arte e scienza in un'unica visione del mondo.

Malevich all'inizio del secolo scorso cerca un punto di arrivo per la pittura, e in qualche modo identifica una icona (nella tradizione delle icone russe) a lui contemporanea nel quadrato: fig. 17. ¹⁵

L'omaggio al quadrato di Joseph Albers: un esempio nella fig. 18. Albers lavora sugli accostamenti dei colori e quindi sulle luci; tuttavia non manca una reminescenza prospettica. Anche Morellet lavora su rappresentazioni cromatiche di quadrati (fig. 19).

Sol LeWitt¹⁶ usa il quadrato come spazio progettuale: fig. 20.

Bertozzi: ecco un altro esempio di uso del quadrato, fig. 21. Qui l'autore lavora sulla percezione della superficie legata alle irregolarità del materiale: la semplicità del quadrato fornisce il supporto concettuale per focalizzare l'attenzione sull'essenza del lavoro.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.../ SPIRALE AUREA!/ il piede salta e comprime le sue ossa nello/ spazio di se' comprime i suoi perfetti pinoli/ ossei nella forma dei numeri/ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, .../ brillano al sole i pinoli nudi ovvero le ossa/ scoperte della pigna! / 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... "

¹⁴Bertozzi (2007)

¹⁵citando Malevich viene a proposito un'osservazione sull'autoreferenzialità, da Poli (2005): " ... a partire da Cézanne e i cubisti, per dirla in sintesi, l'opera dell'artista si è progressivamente liberata da qualsiasi funzione subordinata a esigenze mimetiche e narrative legate alla rappresentazione virtuale e formale di realtà' altre da se stessa, conquistando lo statuto di oggetto autonomo, con una specifica identità' estetica essenzialmente indipendente ed autoreferenziale dal punto di vista dei criteri linguistici e compositivi ... " Questa osservazione ci offre uno spunto circa possibili vicinanza tra il pensiero del fare arte e quello del fare matematica (sui fondamenti).

¹⁶vedi Vettese (1998, pag. 147-148)

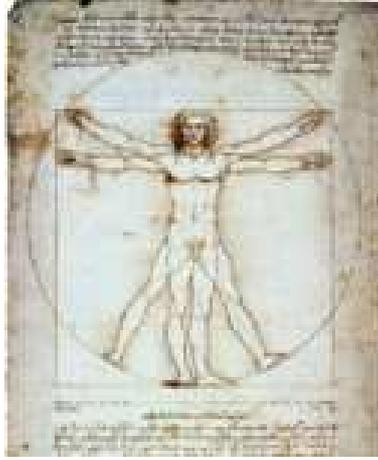


Figura 16: Leonardo's most famous drawing, the Vitruvian Man, is a study of the proportions of the human body, linking art and science in a single work that has come to represent Renaissance Humanism.

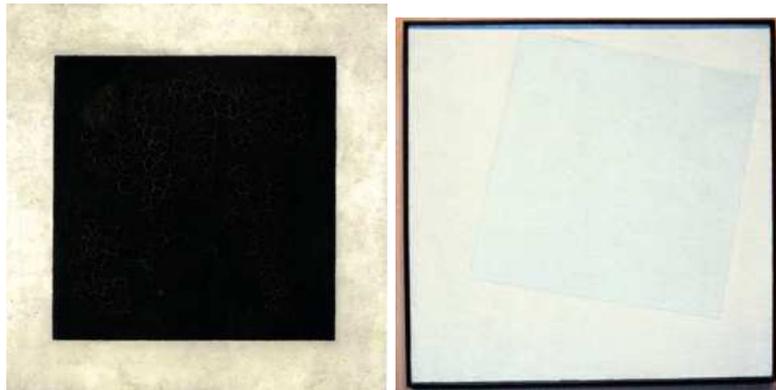


Figura 17: Kasimir Malevich. Black Square, [1913] 1923-29. Oil on canvas, $106.2 \times 106.5cm$. State Russian Museum, St. Petersburg (sinistra). White on White, 1918. Museum of Modern Art, New York (destra).

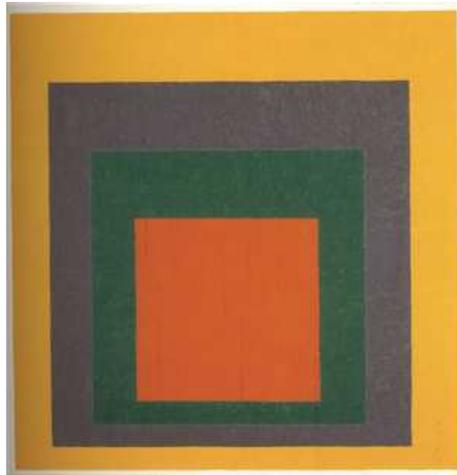


Figura 18: Joseph Albers. Omaggio al quadrato



Figura 19: Francois Morellet. From yellow to purple. 1956.

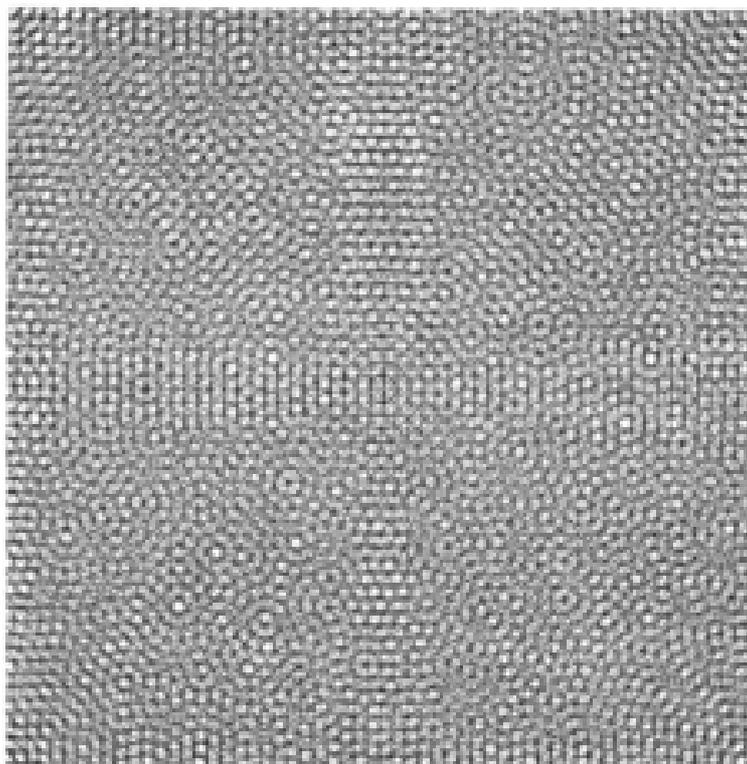


Figura 20: Sol LeWitt. Circles and Grid, Arcs from Four Corners and Four Sides, 1972.

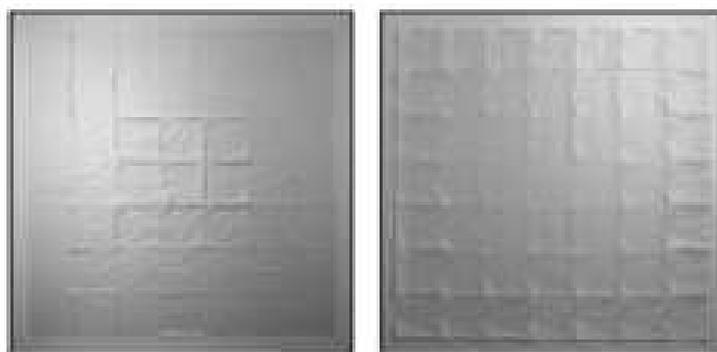


Figura 21: Marco Bertozzi. Superficie sensibile 03 e 02. Carta di pura cellulosa, 245 × 245cm ognuno. 2007.



Figura 22: Bruno Munari. Il quadrato non è più lui. Modello per scultura in acciaio verniciato. Eseguito nel 1996. $58 \times 44 \times 30\text{cm}$.



Figura 23: Hidetoshi Nagasawa. Senza titolo (carta). 2003/2004. Carta, $82 \times 60\text{cm}$. (Paiano and Poli, 2007, pag.44)

E concludiamo con due strutture tridimensionali: un quadrato che non è più un quadrato: fig. 22 ed un rettangolo 'ritorto': fig. 23.

Il lavoro di Hidetoshi Nagasawa merita qualche spiegazione: da un rettangolo di carta viene tagliata parzialmente una cornice rettangolare (rimane attaccata al rettangolo centrale solo in alto, nella figura). Poi tale cornice viene rovesciata da un lato corto: rimane un rettangolo deformato, che ha ora tutt'altra apparenza, la cui forma si regge sulla tensione della striscia di carta: la tensione interna del materiale si rivela generando la forma semicircolare che vediamo in basso (vedi fig. 23). In altre parole, quella strana forma presa dal rettangolo rappresenta la manifestazione della energia potenziale che gli abbiamo conferito, rovesciandolo.

4.2.2 Il teorema di Pitagora

Tutti conoscono il teorema di Pitagora. Il triangolo rettangolo e la dimostrazione del teorema di Pitagora sono in qualche modo il soggetto di un'opera di Max Bill (fig. 24),

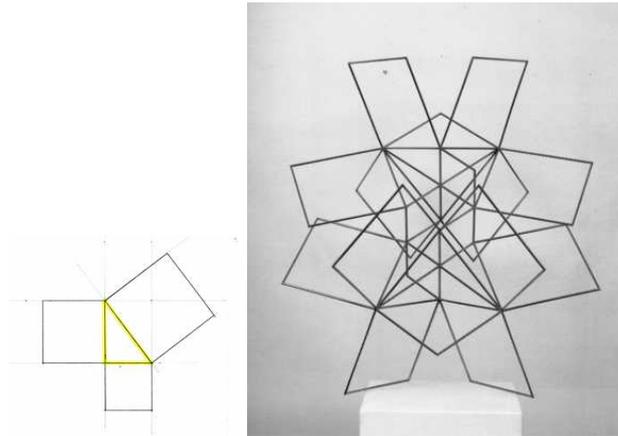


Figura 24: Max Bill (1939-1978). Costruzione di tre dimensioni di quadrato (monumento a Pitagora). Ottone dorato, $90 \times 80 \times 90\text{cm}$

che propone una molteplicità di triangoli rettangoli con relativi quadrati costruiti sui lati, assemblati in una struttura dotata di una grande simmetria formale.

4.3 Poliedri platonici ed oltre

Il punto di partenza della avventura nel mondo tridimensionale della geometria euclidea sta nella considerazione che con i cinque poliedri regolari (platonici: vedi la fig. 25) si esauriscono le possibilità date dai poligoni regolari; per costruire nuovi poliedri occorre combinare poligoni regolari diversi, oppure combinare nuovi poligoni un po' meno regolari, o comunque rompere le regole rigide.

4.3.1 Il rombocubottaedro di Luca e Leonardo

Luca Pacioli fu un grande matematico¹⁷ di cui si racconta essere stato insegnante, tra l'altro, di Leonardo (fig. 26): "While in Milan in 1496 Leonardo met a traveling monk and academic, Luca Pacioli. Under him, Leonardo studied mathematics. Pacioli, who devised the double entry system of bookkeeping and had already published a major treatise on Mathematical knowledge, collaborated with Leonardo in the production of a book called *De divina proportione* about mathematical and artistic proportion. Leonardo prepared a series of drawings of regular solids in a skeletal form to be engraved as plates (fig. 27). *De divina proportione* was published in 1509."

¹⁷aa. vv. (da 2007): Luca Pacioli nacque a Borgo San Sepolcro nel 1445 (conterraneo di Piero della Francesca) e morì a Roma nel 1517. Fu precettore in casa di un mercante veneziano, avendo studiato alla scuola di Rialto. A Venezia si impraticò nell'aritmetica commerciale. Fu frate francescano (dal 1470 circa) e si dedicò all'insegnamento della matematica, che impartì in molte città (tra cui Roma, Milano, Bologna). La sua *Summa de arithmetica, geometria, proportioni, et proportionalita'* (del 1494) è il primo trattato di aritmetica e algebra pubblicato a stampa. Il libro si ispira ad Euclide e a Fibonacci, e contiene i primi esempi di calcolo delle probabilità e di calcolo di un logaritmo, nonché le regole per la tenuta dei libri contabili a partita doppia (fu il primo ragioniere moderno). Nel *De proportione*, pubblicato nel 1509 ed illustrato con le tavole di Leonardo, studia il problema della sezione aurea come modulo ordinatore della architettura e della struttura del corpo umano.

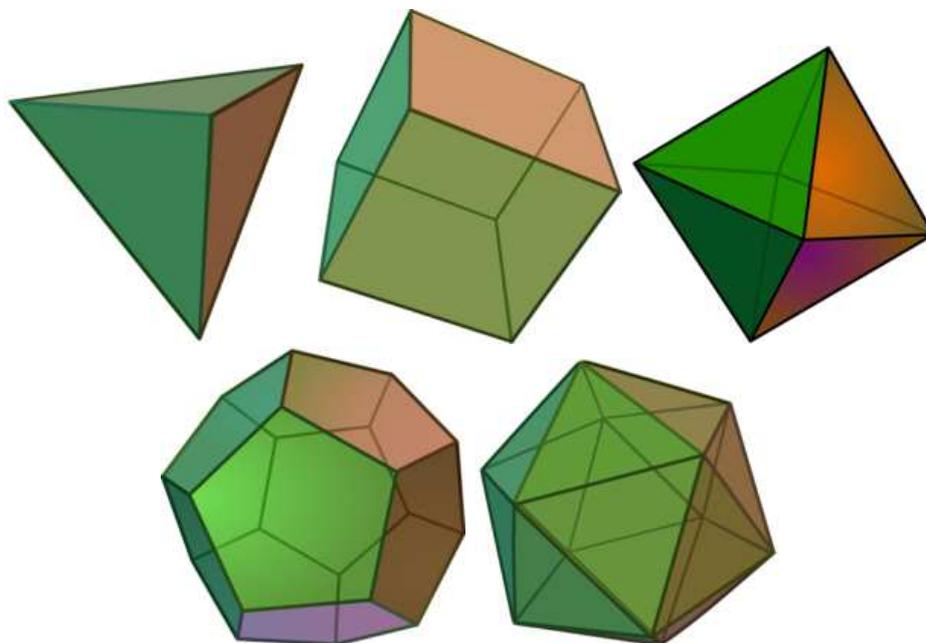


Figura 25: I cinque poliedri regolari ordinari



Figura 26: Painting of Luca Pacioli, attributed to Jacopo de' Barbari, 1495. Table is filled with geometrical tools: slate, chalk, compass, a dodecahedron model. A rhombicuboctahedron half-filled with water is suspended from the ceiling. Pacioli is demonstrating a theorem by Euclid. L'allievo sembra piuttosto distratto.

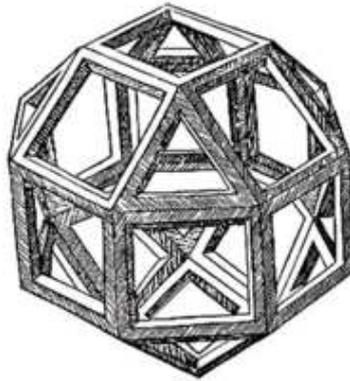


Figura 27: Leonardo. Il rombocubottaedro

4.3.2 Poligoni isosceli e ...

Nel 2001 Lucio Saffaro¹⁸ presento' alcuni aspetti del suo lavoro di matematico¹⁹ ad un convegno di una serie dal titolo "Matematica e cultura" (occasione fertile per questa ricerca, a parte l'infelice presenza di quella congiunzione che qui io cerco di contraddire).

In particolare Saffaro propone di ampliare la classe dei poligoni, considerando per esempio i poligoni isosceli. Un poligono isoscele e' un poligono con tutti gli angoli interni uguali, meno uno, e quindi con tutti i lati uguali, meno due (quelli che racchiudono l'angolo diverso dagli altri).

Notiamo che la somma s (in gradi) degli angoli interni per un poligono di N lati e' data dalla semplice formula:

$$s = (N - 2) \times 180 \quad (14)$$

Se il poligono e' regolare, ciascun angolo e' dato da

$$\alpha = \frac{s}{N} \quad (15)$$

Per esempio, se consideriamo un pentagono, $N = 5$, $s = 540$ e $\alpha = 108$.

Tutti sappiamo benissimo che di pentagoni regolari ce n'è uno solo (come la mamma). Di pentagoni isosceli ce n'è un'infinita'. Proviamo ad analizzare l'evoluzione della forma del pentagono, cioe' come si deforma un pentagono regolare al modificarsi degli angoli, ovvero studiamo il passaggio da poligono regolare a poligono isoscele. Manteniamo dunque fissata la lunghezza di tre lati (i tre lati evidenziati in giallo nelle figure 28 e 29), e la misura α dei quattro angoli adiacenti. angolo $\beta = 540 - 4\alpha$: Nelle figure 28 e 29 l'angolo $\beta = 540 - 4\alpha$ e' l'angolo al vertice in alto (o in basso). I due lati adiacenti a questo angolo β sono uguali tra loro, ma in generale diversi dagli altri tre.

Si parte dal pentagono regolare di lato a , con $\alpha = 108$, diminuendo l'angolo α (fig. 28: a partire dal pentagono regolare, la figura si legge da destra verso sinistra e dal basso in alto!) si trova prima un quadrato ($\alpha = 90$, $\beta = 180$), poi un triangolo equilatero, poi i lati cominciano ad intrecciarsi, sino a superare una prima crisi (due lati paralleli: il vertice corrispondente all'angolo β va all'infinito), poi si ottiene una stella, che per $\alpha = 36$ e' regolare e infine i cinque lati collassano in un segmento di lunghezza a .

¹⁸nato a Trieste nel 1929, laureato in Fisica a Bologna, morto a Bologna nel 1998

¹⁹Saffaro (2001)

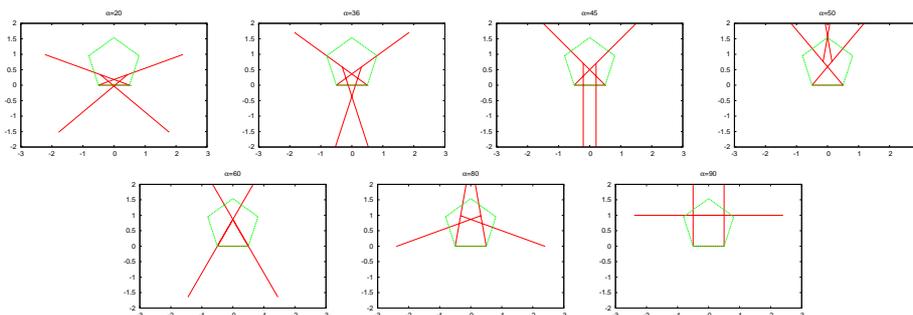


Figura 28: le trasformazioni del pentagono

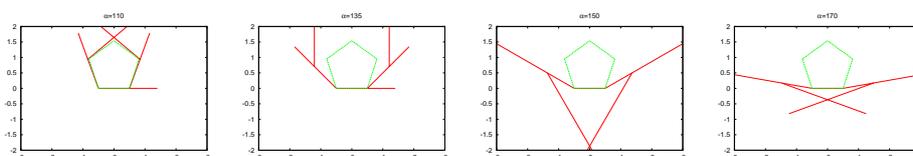


Figura 29: le trasformazioni del pentagono

Partendo sempre dal pentagono ma aumentando l'angolo α (fig. 29, ora la si legge da sinistra a destra e dall'alto in basso) si ottiene un pentagono allungato che raggiunge una nuova crisi (due lati paralleli) per $\alpha = 135$. A questo punto il pentagono diventa concavo-convesso e si rovescia, fino a ridursi ad un segmento, lungo $3a$

Seguendo dunque il procedimento elementare descritto da Saffaro, abbiamo un'infinita' di pentagoni, che si prestano a nuove costruzioni tridimensionali.

4.3.3 ... poliedri eleganti

Con i poligoni isosceli il matematico Saffaro definì le regole per trovare nuovi poliedri. Come artista, ne fece uso. Tuttavia: "Saffaro mi ha sempre ribadito che, nella pittura, non elaborava mai alcuna idea matematica. Naturalmente prelevare figure (*nota* i poliedri) che sono idee matematiche e posarle sulla tela, dipinte a olio, comporta non pochi fraintendimenti. Gli equivoci maggiori nascono nel vedere reciproci prolungamenti e vincoli tra matematica e arte."²⁰

Nella pittura di Saffaro il legame tra il mondo della matematica e quello dell'arte visiva e' indissolubile, pur nella loro autonomia: qualche esempio nelle Fig. 30, 31, 32.

Un poliedro piu' moderno: Duo-colour Double Polyhedron Lamp, 2011, di Olafur Eliasson. Questo artista lavora con gli elementi naturali, ed in particolare con la luce. E' interessante che la luce sia stata 'incorniciata' in un solido, Fig. 33.

5 Superfici unilatera

Una superficie puo' essere aperta o chiusa: un cerchio e' una superficie aperta (possiede un bordo), una sfera e' una superficie chiusa. Una superficie puo' essere orientabile (ovvero bilatera) oppure non orientabile (ovvero unilatera). Una superficie e' orientabile se dato

²⁰ Accame (2004, pag. 14).

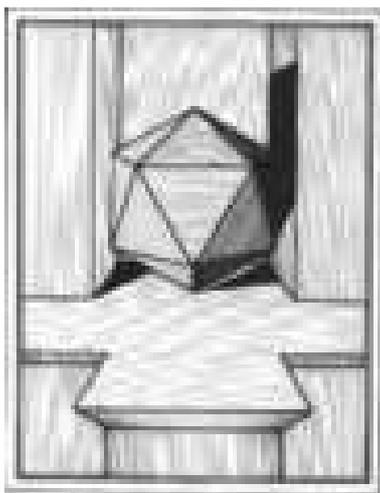


Figura 30: Lucio Saffaro. Monumento a Keplero. 1970

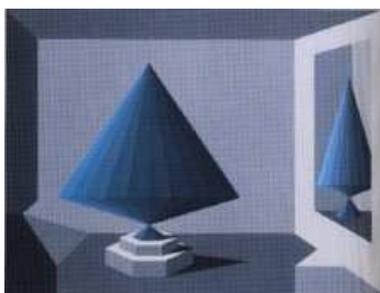


Figura 31: Lucio Saffaro. La stanza di Menandro (opus CCLII), 1978. Olio su tela, $90 \times 120\text{cm}$. Coll. privata, Napoli.



Figura 32: Lucio Saffaro. La stella di Origene (opus CCXCCII); olio su tela, $80 \times 60\text{cm}$, 1991. Fondazione Saffaro, Bologna



Figura 33: Olafur Eliasson. Duo-colour Double Polyhedron Lamp, 2011.

un punto P , qualsiasi percorso si segua sulla superficie che inizi e termini in P e' tale per cui l'orientazione positiva definita in P all'inizio si ritrova tale al termine del percorso.

5.1 Il nastro di Moebius

Un foglio ha due facce: ma se incollo una striscia di carta ruotando di 180 gradi un'estremita', ottengo una superficie con una sola faccia (vedere le formiche che camminano sul nastro e percorrono entrambe le facce: ma ci sono ancora due facce?). La superficie di Moebius (1790-1868; matematico tedesco che si occupo' di topologia) e' il primo esempio di superficie unilatera aperta.

Il nastro di Moebius e' stato usato da molti artisti.

Max Bill raggiunse quel tipo di forma attraverso l'intuizione, e a posteriori ebbe coscienza della esistenza come oggetto matematico.

" L'arco di tempo piu' lungo in assoluto, cinquant'anni, e' stato quello che Bill ha dedicato a un gruppo di opere basae sul concetto di nastro infinito. La prima versione risale agli inizi della sua attivita' e l'ultima invece (se e' veramente l'ultima) la porto' a termine nel 1968: la monumentale Continuita' posta davanti alla Deutsche Bank di Francoforte.

E' lo stesso Bill a scrivere nel 1935 la storia della sua origine: - mi si assegno' il compito di progettare un elemento dinamico inteso come 'luogo di fuoco' e composto da una installazione statica fatta da fili metallici incandescenti, esposti in una casa modello fornita al suo interno di ogni tipo di impianti elettrici. Nella ricerca di una soluzione per una scultura sospesa in grado di girare nell'aria calda che saliva, creai un oggetto costituito da un uniuco lato e lo chiamai 'nastro infinito'.

Ancora, non fu dalla matematica, ma da un'idea di esperimento che Bill arrivo' al nastro di Moebius, il quale gia' da decenni era conosciuto presso gli specialisti come una delle creazioni matematiche piu' entusiasmanti dai tempi dei corpi platonici. Quando Bill ne venne a conoscenza, rimase comprensibilmente scioccato e il tema fu archiviato.

Per fortuna pero' lo riprese alcuni anni dopo realizzando cosi' alcune tra le piu' belle sculture di questo secolo. Anche se a livello teorico il suo nastro infinito e' identico a quello di Moebius, Bill aveva in mente qualcosa di diverso: - il mio lavoro non era ne' di carattere scientifico ne' di carattere matematico, bensì strettamente estetico."²¹

Un esempio e' riportato in Fig. 35. Parlando di Moebius non possono mancare le immagini di Escher, figure 36 e 37. E non va dimenticato l'uso profondamente diverso che

²¹Gerstner (2006)

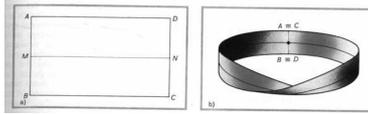


Figura 34: Nastro di Moebius



Figura 35: Max Bill. Endless torsion. 1953-1956. (Bronzo, 125 x 125 x 80 cm. Antwerpen)

ne fa Lygia Clark per significare l'esperienza della scelta (e della fine della possibilità di scelta) ²²: fig. 38 e 39.

6 La bottiglia di Klein e quella di Boccioni

La bottiglia di Klein²³ (fig. 40) è un esempio di superficie unilatera chiusa, che cioè non ha interno (non si può sapere se siete dentro o fuori). Se viene tagliata a metà nel senso della lunghezza si ottengono due nastri di Moebius. Non si può veramente costruire fisicamente (perché dovrete fare un buco che non esiste nell'oggetto geometrico) ma se ne possono fare dei modelli. Ancora come assonanza istintiva, la bottiglia di Boccioni (fig.

²²Bois and Krauss (2003, pag. 211-213)

²³Felix Christian Klein (Duesseldorf, 1849; Goettingen, 1925), matematico tedesco conosciuto soprattutto per i suoi contributi alla geometria non euclidea, ai collegamenti tra geometria e teoria dei gruppi e per alcuni risultati sulla teoria delle funzioni.

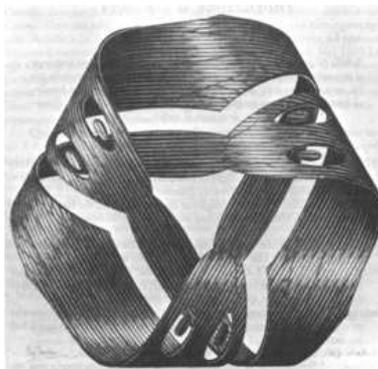


Figura 36: M. C. Escher. Nastro di Moebius. Xilografia su legno di testa a quattro colori, 1961



Figura 37: M. C. Escher. Nastro di Moebius. Xilografia su legno di testa a tre colori, 1963

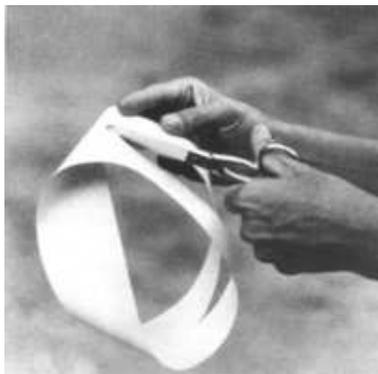


Figura 38: Lygia Clark. Caminhando. 1964



Figura 39: Lygia Clark. Caminhando. 1964



Figura 40: Una rappresentazione della bottiglia di Klein.

41) nel suo mostrarci interno ed esterno richiama alcune suggestioni della bottiglia (del geometra) Klein.

7 Storia sintetica della prospettiva

La prospettiva e' un esempio eccellente della assimilazione di un concetto matematico/geometrico e della successiva interpretazione ed elaborazione in chiave non necessariamente naturalistica.

La geometria della prospettiva e' richiamata in Fig. 42.

La prospettiva 'naturale' entra nel disegno sotto forma di conoscenza delle regole della geometria: prendiamo ad esempio Paolo Uccello (fig. 44, 45) e Piero della Francesca²⁴: abbiamo gia' visto la flagellazione (fig. 13). Sempre all'ambiente artistico urbinato appartiene questa famosa prospettiva: fig.43. Ricordiamo poi la prospettiva 'suggestiva' del barocco oppure di Piranesi: fig. 46; contemporaneamente, la prospettiva modificabile ad arte dei grandi vedutisti ²⁵ : vedi la figura 47 da confrontare con la figura 48; la prospettiva

²⁴E' interessante ricordare che di Piero si dice insegnasse geometria, in tarda eta', a Urbino. Da WebMuseum: ... In the last years of his life Piero apparently ceased painting to pursue other interests, including writing. He wrote a treatise on painting and others on geometry and applied mathematics. ...

²⁵A proposito di regole piu' o meno rigide e delle eccezioni, riporto questo commento circa il modo di operare di Bernardo Bellotto: "Queste sovrapposizioni molto realistiche hanno spesso indotto a ritenere che Bellotto impiegasse la camera oscura per cogliere le immagini....Un altro inconveniente dell'immagine della camera consisteva in un fenomeno che Antonio Maria Zanetti il Giovane citava a proposito di Canaletto: questi avrebbe riconosciuto quegli errori derivanti da una rigida osservanza delle regole prospettiche.... Cosi', ad una grande distanza laterale dal punto di fuga della prospettiva le forme rotonde appaiono ellittiche. Il punto di fuga della veduta del Mercato Nuovo di Dresda dipinta da Bellotto, per esempio, e' a sinistra del centro del quadro; la guardiola allungata a destra e' conforme alla raffigurazione prospettica, non lo e' invece la cupola della Frauenkirche che appare subito sopra, e che, per precisione matematica, avrebbe dovuto assumere una forma ovale, come quella mostrata da Jan van der Heyden una sola volta nella veduta della Damplatz di Amsterdam..... Bellotto nega qui dunque, come in altre opere, la verita'



Figura 41: Umberto Boccioni. Sviluppo di una bottiglia nello spazio. 1912/13. Bronzo, Milano, Civica Galleria d'Arte Moderna.

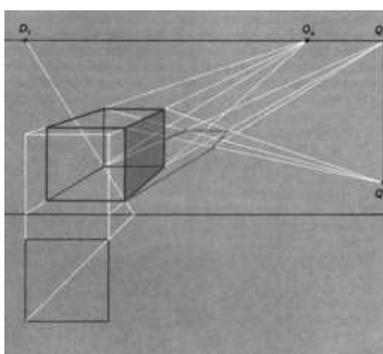


Figura 42: Prospettiva di un cubo



Figura 43: Veduta di città ideale. Circa 1475. Urbino. Da Zuffi (1997), pag. 45.

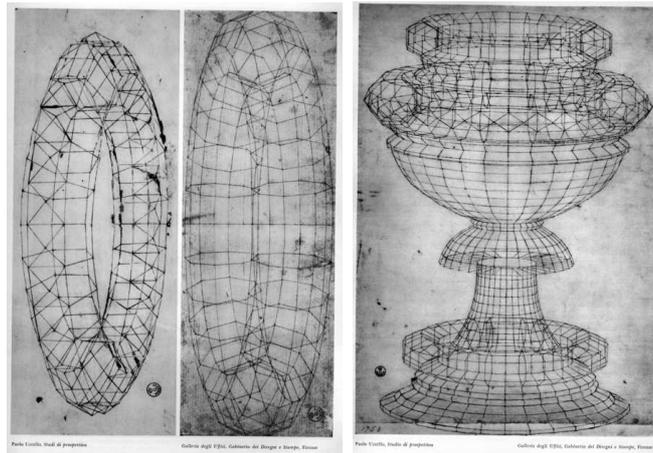


Figura 44: Paolo Uccello. Studi di prospettive. Da D'Ancona (1959), pag. 8 e pag. 19

dei cubisti: Braque, fig. 49, e Picasso, fig. 50 (e anche fig. 51); la prospettiva di Arico' (fig. 52, ricordare anche il monumentale 'Prospettiva per Paolo Uccello' del 1970) come "...evocazione profonda che rende perfettamente tutto l'amore di un contemporaneo per i vertici della tradizione artistica. ... non semplice evocazione, ... ma invenzione, capacità' di rinnovamento..."²⁶.

7.1 Prospettive illusionistiche

In un certo senso, le illusioni ottiche sono parenti della prospettiva: in fondo le assonometrie e le prospettive 'impossibili' di Escher sono illusioni ottiche: fig. 54, 53

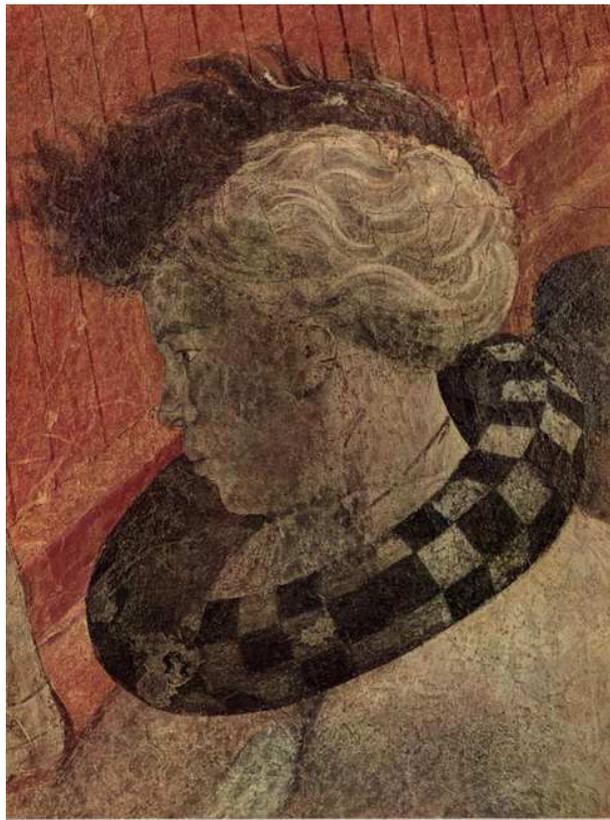
Possiamo qui vedere altri due esempi: Joseph Albers: figura 55 e Victor Vasarely: figure 56 e 57.

Considerate anche questi lavori di Mary Obering²⁷: fig. 58 e 59; oppure le 'sculture' di Robert Lazzarini (cognome italiano, cittadinanza americana): fig. 60.

matematica dipingendo una veduta che e' realistica solo secondo la nostra consuetudine visiva." (Weber, 2001)

²⁶Accame (1990), pag. 54

²⁷Mary Obering. Shreveport, Louisiana, 1937. Master in arte a Denver, 1971. Incontra Carl Andre nel 1971, che la introduce nell'ambiente artistico di NY, dove conosce Donald Judd. www.mobering.com



Tav. XI. - Paolo Uccello, *Il Diluvio Universale* (particolare) Santa Maria Novella, Chiesa Verde, Firenze

Figura 45: Paolo Uccello. Il diluvio universale (particolare). Firenze. 1450. Da D'Ancona (1959), Tav. XL



Figura 46: Giovanni Battista Piranesi. Capriccio con scalone con trofei (Carceri VIII. No. 117). Circa 1750.



Figura 47: Bernardo Bellotto. Il Mercato Nuovo di Dresda visto dalla Mortizstrasse. Dresda. Circa 1750.



Figura 48: Jan van der Heyden. La piazza del Palazzo di citta' ad Amsterdam. Firenze



Figura 49: Georges Braque. Il vecchio castello, La Roche-Guyon. 1909. Da Raeburn. (2004)



Figura 50: Pablo Picasso. Ritratto di Maya con la sua bambola, 1938



Figura 51: La composizione vista da uno spettatore esterno

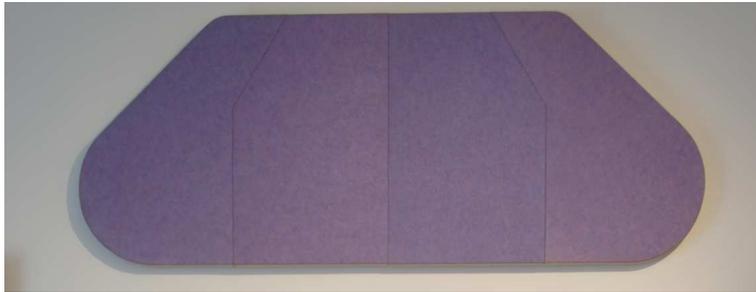


Figura 52: Prospettiva viola. 1973.

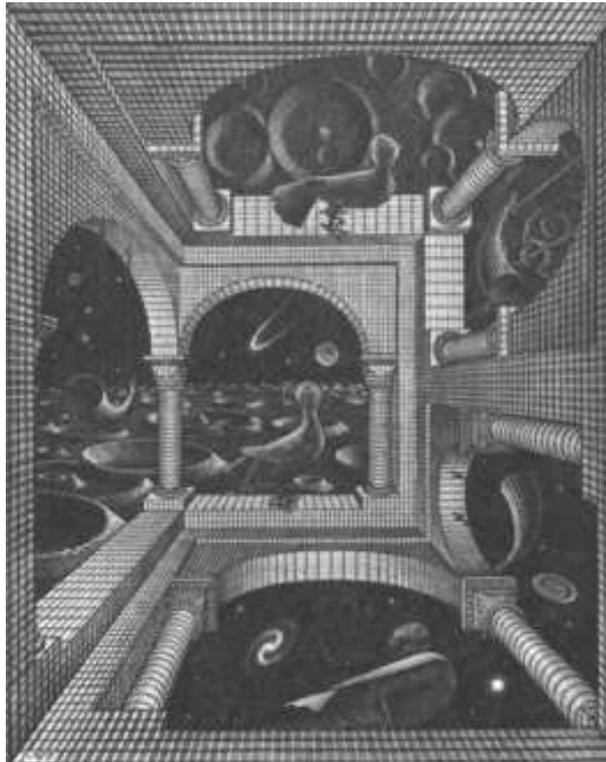


Figura 53: M.C.Escher. Altro mondo. Xilografia su legno di testa a tre colori, 1947.



Figura 54: M.C.Escher. Cascata. Litografia, 1961

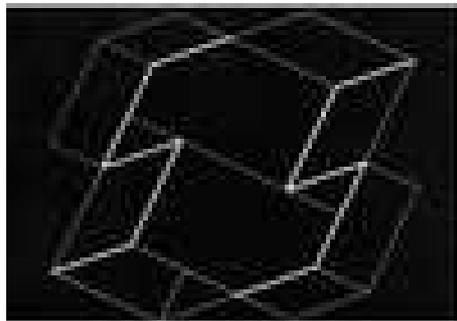


Figura 55: Josef Albers, 1888-1976. Graphisme geometrique (20.5 × 28cm). 1965. Laquered wood.

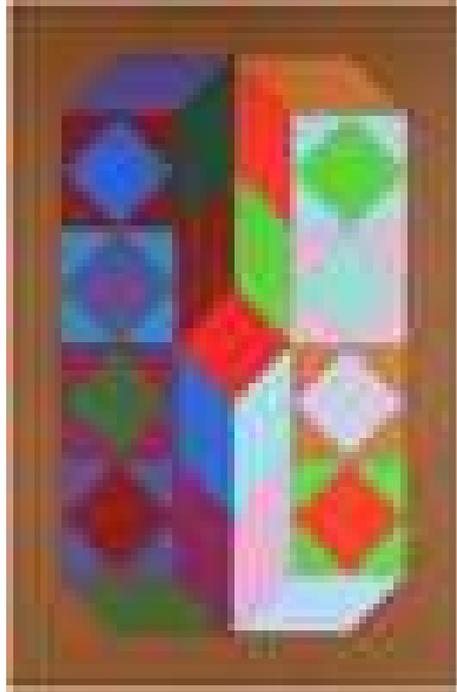


Figura 56: Victor Vasarely. Sonora II, acrilico su tavola, 60x40 cm, 1973

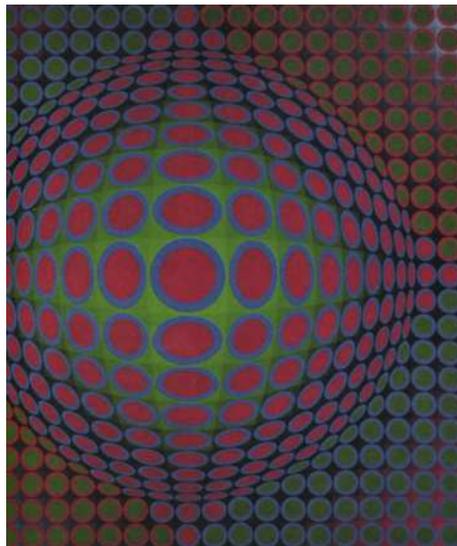


Figura 57: Victor Vasarely. Vega 200. 1968. Acrilico su tela, collezione privata.



Figura 58: PA III - PS2 - 2003 Egg tempera and gold leaf on gessoed panel. 58,50 cm x 58,50 cm



Figura 59: Persol - 2003 Egg tempera and gold leaf on gessoed panel. 58,50 cm x 53,50 cm



Figura 60: Robert Lazzarini, 2011

8 Formule e rappresentazione

8.1 Leonardo, turbolenza e nubi

Rappresentazione ed evocazione sono due concetti che appartengono sia alla scienza sia all'arte.

Partiamo da una citazione in merito alla capacita' della scultura in rilievo di evocare cio' che e' nascosto: "... l'atteggiamento dello spettatore si spiega chiaramente attraverso la natura del rilievo stesso: nella sua lettura immediata e trasparente dell'opera, egli si trova investito di un'onniscienza parallela a quella dell'autore " ²⁸.

Questo concetto si applica a pieno titolo alla scienza (matematica e fisica principalmente): un aspetto fondamentale per chi si occupa di scienza e' il potere evocativo delle formule²⁹. Per un persona con propensione alla matematica esistono delle 'belle formule', delle 'formule eleganti'. Incidentalmente, questo atteggiamento tende ad allontanare le persone non specialiste dalla matematica. Vorrei essere capace di rovesciare questa sensazione, proprio chiedendovi di considerare il fatto che la capacita' evocativa del segno e' una proprieta' che accomuna matematica e disegno, e, come si diceva all'inizio, capirsi e' una questione di disponibilita' e di allenamento ³⁰.

Un esempio: la turbolenza ed il moto dei fluidi. Qui di seguito trovate alcune equazioni, tanto per dare un'idea di un possibile linguaggio. Queste equazioni sono state formalizzate da Navier e Stokes nel 1823, e poi da Reynolds (1883) e vengono usate correntemente da fisici, meteorologi, ingegneri. Dovete anche sapere che non conosciamo soluzioni esatte di queste equazioni (se non in casi piuttosto banali) ³¹ e quindi per capire abbiamo tuttora bisogno dell'esperienza (sempre) e della soluzione numerica approssimata: vedi la Fig. 61.

²⁸Krauss (1998, pag. 20)

²⁹potere evocativo che costituisce un carattere delle opere scritte di qualunque natura, come osservato dal fisico Bernardini in una conversazione con il linguista De Mauro: Bernardini and DeMauro (2003, pag. 21 e pag.124). Il disegno possiede tale carattere in misura certo non minore.

³⁰mi sembra pertinente notare l'importanza del segno sottolineata da Benjamin (1982) alla fine degli anni dieci, distinguendo tra pittura e disegno: " Si potrebbe dire che la sostanza del mondo e' attraversata da due sezioni: la sezione longitudinale della pittura, e la sezione trasversale di certe forme di disegno. Pare che la sezione longitudinale abbia una funzione rappresentativa, contenga in qualche modo le cose; la sezione trasversale e' simbolica: contiene i segni."

³¹Richard Feynman, premio Nobel per la Fisica nel 1965, scrive, dopo aver presentato appunto queste equazioni: "La lezione piu' importante da imparare da tutto questo e' che una formidabile varieta' di comportamenti si nasconde nel semplice sistema di equazioni....L'unica difficolta' e' che non abbiamo oggi il potere matematico di analizzarle, eccetto che per numeri di Reynolds piccolissimi (piu' o meno, per velocita' molto basse)... Abbiamo visto or ora come la complessita' delle cose possa facilmente e drammaticamente eludere la semplicita' delle equazioni che le descrivono. Inconsapevole della potenzialita' delle equazioni anche semplici, l'uomo ha spesso concluso che non le pure equazioni, ma nulla di meno che un Dio e' quel che ci vuole per spiegare la complessita' dell'universo." (da Feynman et al., 1969, pag. 41-15)

$$\frac{Du_i}{Dt} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \varepsilon_{ij3} f u_j + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{i3} g \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{DT_f}{Dt} \equiv \frac{\partial T_f}{\partial t} + u_j \frac{\partial T_f}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 T_f}{\partial x_j \partial x_j} \quad (18)$$

$$p = R \rho_f T_f, \quad R = 287.04 \text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1} \quad (19)$$

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (20)$$

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} \equiv \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_{00}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \varepsilon_{ij3} f \bar{u}_j + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{i3} \frac{g}{\rho_{00}} \rho - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{D\bar{p}}{Dt} \equiv \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} = \chi \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_j \vartheta'}}{\partial x_j} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u'_i u'_k}}{Dt} &\equiv \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \\ &= \left(-\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} - \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_j} \\ &\quad - \frac{g}{\rho_{00}} (\delta_{k3} \overline{u'_i \rho'} + \delta_{i3} \overline{u'_k \rho'}) + f (\varepsilon_{kj3} \overline{u'_i u'_j} + \varepsilon_{ij3} \overline{u'_k u'_j}) \\ &\quad - \frac{1}{\rho_{00}} \left(\frac{\partial \overline{p' u'_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{p' u'_i}}{\partial x_k} \right) - \frac{\overline{p'}}{\rho_{00}} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + \nu \left(\overline{u'_k \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}} + \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_j \partial x_j}} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

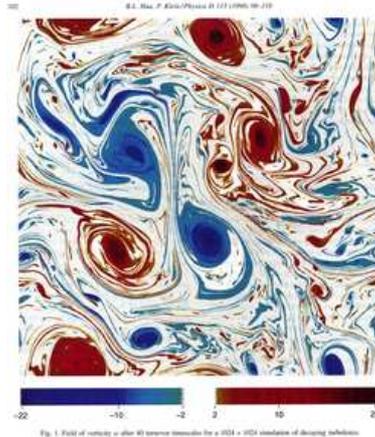


Figura 61: Simulazione numerica di un flusso turbolento. La visualizzazione mette in evidenza grandi strutture (vortici) immerse in un ambiente di strutture analoghe, di dimensioni decrescenti. Il colore blu corrisponde a una rotazione in senso antiorario, il rosso in senso orario. (da Hua and Klein, 1998, fig.1).

Guardiamo i disegni di Leonardo: per esempio la figura 62. Leonardo non conosce le formule che governano il moto dei fluidi, i suoi disegni contengono in qualche modo l'informazione che uno specialista addestrato puo' ricavare dalle formule (dalle formule si puo' ottenere una previsione quantitativa, dai disegni no).

La forza di quelle immagini sta dunque nel fatto che evocano/rappresentano fenomeni reali di cui abbiamo una conoscenza parziale: i disegni di Leonardo ci portano oltre lo specifico fenomeno, per dirci qualcosa sulla natura del moto dei fluidi (l'instabilita', i vortici) del tutto generale. Talmente generale che sia le simulazioni numeriche (fig. 61) sia immagini da satellite dell'atmosfera (la figura 63 per qualche esempio) ci mostrano fenomeni qualitativamente simili e governati dalle stesse leggi.

8.2 Formule 'decorative'

Diverso e' l'uso di formule come 'decorazione' (figure 64): "... in Francia Bernard Venet (1941) esponeva pagine di grafici tratti da libri scientifici enormemente ingigantiti..." ³²

9 Computer e videoarte

Certamente siete tutti piu' esperti di me nell'uso della grafica sul computer; val la pena comunque osservare come la costruzione e la restituzione delle immagini richieda complessi algoritmi di calcolo, e quindi una conoscenza matematica non banale.

Quasi per gioco, quanto segue e' un paragrafo della voce "computergrafica 3D" di Wikipedia:

" Oggetti tridimensionali semplici possono essere rappresentati con equazioni operanti su un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale: per esempio, l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ perfetta per una sfera di raggio r . Anche se equazioni cos semplici possono sembrare limitative, l'insieme degli oggetti realizzabili viene ampliato con una tecnica chiamata geometria solida costruttiva (CSG, constructive solid geometry), la quale

³²Vettese (1998), pag. 213



Figura 62: Esempi di flusso di acqua, di Leonardo.

combina oggetti solidi (come cubi, sfere, cilindri, ecc.) per formare oggetti pi complessi attraverso le operazioni booleane (unione, sottrazione e intersezione): un tubo pu ad esempio essere rappresentato come la differenza tra due cilindri aventi diametro differente.

Queste equazioni non sono tuttavia sufficienti a descrivere con accuratezza le forme complesse che costituiscono la gran parte del mondo reale, per cui non di utilizzo comune. Per modellare superfici curve in modo arbitrario si possono usare le patch, ovvero l'estensione delle spline, che approssimano curve continue, alle tre dimensioni. Le patch pi comunemente usate sono in pratica basate su spline NURBS.

L'impiego di equazioni matematiche pure come queste richiede l'utilizzo di una gran quantit di potenza di calcolo, e non sono quindi pratiche per le applicazioni in tempo reale come videogiochi e simulazioni. Una tecnica pi efficiente, e tuttora la pi diffusa e flessibile il poly-modelling o modellazione poligonale. Questa permette un maggiore livello di dettaglio a spese per della maggiore quantita di informazioni necessaria a memorizzare l'oggetto risultante, chiamato modello poligonale.

Un modello poligonale e sfaccettato come una scultura grezza pu essere comunque raffinato con algoritmi per rappresentare superfici curve: questa tecnica chiamata superfici di suddivisione. Il modello viene raffinato con un processo di interpolazione iterativa rendendolo sempre pi denso di poligoni, che approssimeranno meglio curve ideali, derivate matematicamente dai vari vertici del modello. "

Tecniche di computergrafica sono usate correntemente per la pubblicita', il cinema, la progettazione. Visto che stiamo parlando di matematica ed arte, possiamo prendere in considerazione qualche artista, e le sue opere, che usa in modo essenziale questi strumenti. (vedi anche <http://dam-berlin.de/mlContent-pa-showpage-pid-4.html>)



Figura 63: Scia di vortici sottovento all'isola di Guadalupe, all'isola di Capo Verde, e un ciclone tropicale

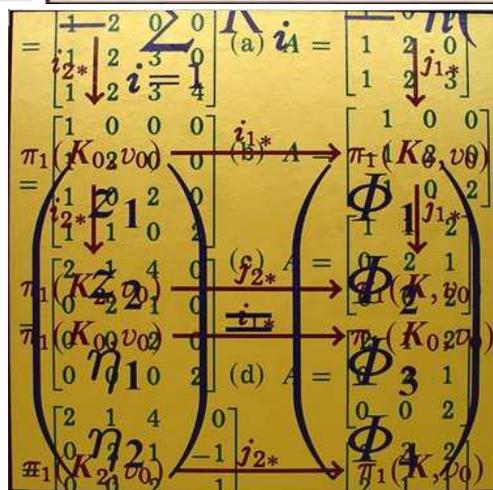
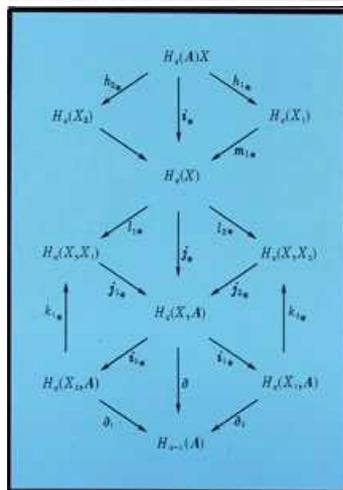
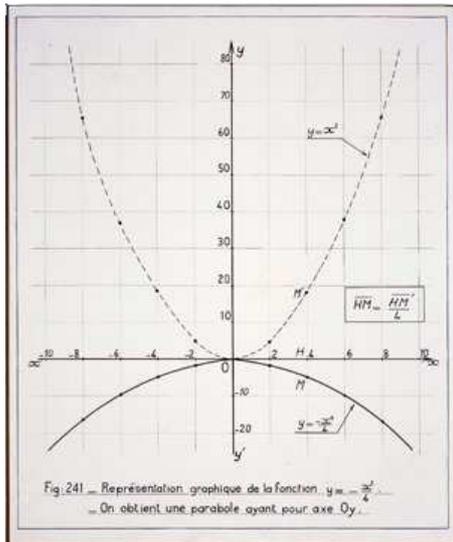
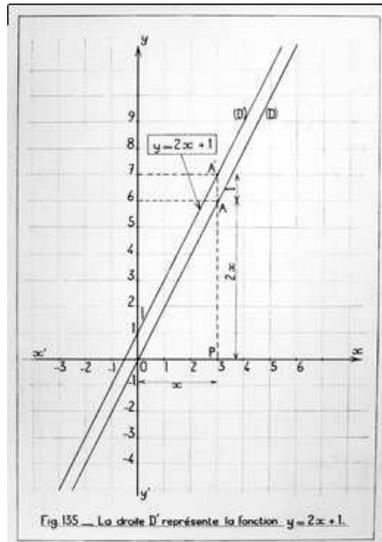


Figura 64: Bernar Venet. Opere dal 1966 al 2004.



Figura 65: **L.movi**, 2011. Still da video.

9.1 Eelco Brand (Rotterdam, 1969)

Eelco Brand sees a major drive for artists in their will to imitate, to double and to improve nature, in his opinion a will deeply rooted in human culture. Visual art always wanted to imitate nature and create ideals of it. Eelco Brand cites these imitations and creations in an ironical way and creates both absurd and surreal objects from it. The nature in his paintings and 3-D animations seems surreal, placing the incidental in the center. With the help of computer technology Eelco Brand brings imitation to its extreme. His simulated reality seems so perfect that only on second sight what seems like nature gets exposed as fiction.

In *L.movi* il paesaggio si modifica seguendo un processo random di evoluzione delle linee di 'costa'. Questa evoluzione e' tuttavia 'congelata' nel file.

9.2 Casey Reas (Los Angeles, 1972)

As an artist, Reas employs ideas explored in conceptual and minimal artworks as focussed through the contemporary lens of software. Reas' software and images are derived from short text instructions explaining processes which define networks. The instructions are

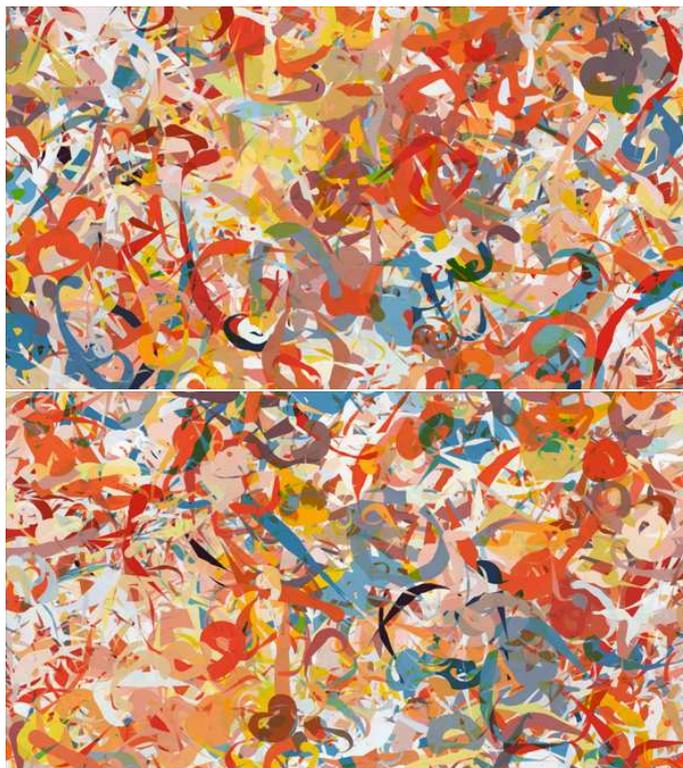


Figura 66: **Process 16 (Software 3)**. 2012. Unique custom software. Variable dimensions

expressed in different media including natural language, machine code, computer simulations, and static images. Each translation reveals a different perspective on the process and combines with the others to form a more complete representation.

<http://reas.com/>

9.3 Diego Zuelli (Reggio Emilia, 1979)

" A software continuously recombine some elements to provide infinitely diverse combinations of rings, planets, light conditions and movements. The sound score is random generated as well: a bandoneon plays notes and chords following only a few timing rules."

Il supporto de 'Il complesso dei pianeti' e' un software che presenta immagini ottenute come combinazioni casuali di elementi: potenzialmente non si rivedono mai due immagini identiche.

10 Il pensiero riflette su se stesso: un parallelo ulteriore tra disegno e matematica

Un'osservazione sull'autoreferenzialita':

" a partire da Cezanne e i cubisti, per dirla in sintesi, l'opera dell'artista si e' progressivamente liberata da qualsiasi funzione subordinata a esigze mimetiche e narrative legate alla rappresentazione virtuale e formale di realta' altre da se stessa, conquistando lo sta-



Figura 67: **Il complesso dei pianeti**, 2013. Still da video.

tuto di oggetto autonomo, con una specifica identita' estetica essenzialmente indipendente ed autoreferenziale dal punto di vista dei criteri linguistici e compositivi ..."³³

Questa osservazione ci offre uno spunto circa possibili vicinanze tra il pensiero del fare arte e quello del fare matematica (sui fondamenti).

Analizziamo l'evoluzione della matematica, e della riflessione dei matematici sulla loro disciplina: osserviamo un lato 'ingegneristico', costruttivo, ed un lato 'autoriflessivo'. Ve ne facciamo un brevissimo cenno, perche' fa gioco al discorso sull'esistenza di parallelismi ed in sostanza sull'unitarieta' del pensiero ³⁴.

La matematica nasce come aritmetica, strumento per fare di calcolo. Non e' scissa pero' dalla logica e dalla filosofia nel mondo greco. Questa unificazione gioca brutti scherzi, se pensate a come viene utilizzata da Zenone per dimostrare l'impossibilita del movimento (la freccia che scoccata verso un bersaglio copre meta' del percorso in un dato tempo, poi meta' del rimanente percorso in un intervallo di tempo minore ma finito, poi ancora meta' del percorso rimanente e cosi' via; potete continuare a dimezzare senza mai trovare una conclusione del tipo: lo spazio rimanente e' zero). Zenone con un argomento analogo ci mostra che Achille non potra' mai raggiungere la tartaruga che si muove nella sua stessa direzione, se e' partito con un handicap anche piccolo, ma finito. La soluzione al paradosso sta nella comprensione delle serie convergenti e del concetto di passaggio al limite.

Questo e' un paradosso che verte sul calcolo di somme di infiniti addendi, un'estensione delle somme del bilancio di casa. Ma esiste un altro tipo di problema, che sempre ha radici nel pensiero greco.

Prendete l'affermazione del filosofo cretese Epimenide: 'tutti i cretesi sono bugiardi'. L'affermazione puo' essere riformulata cosi': 'Questo enunciato e' falso'. E' chiaro che se l'affermazione fosse vera sarebbe falsa, e viceversa.

Questo paradosso attiene alla logica; ha generato altri paradossi equivalenti che hanno stimolato la fantasia dei matematici alla fine dell'Ottocento. Il problema consisteva nel tentativo di meccanizzare i processi del ragionamento. I greci antichi ne sapevano qualcosa: Aristotele aveva codificato il sillogismo; Euclide la geometria.

Nell'Ottocento si scoprirono geometrie non euclidee: questo mise in dubbio la tesi che la matematica studiasse il mondo reale e getto' un poco di panico nei circoli matematici.

³³Poli (2005)

³⁴chi fosse curioso puo' trovare una trattazione piu' completa, pur sempre divulgativa, in Hofstadter (1984), da cui ho tratto questa parte.

George Boole e Augustus De Morgan andarono oltre Aristotele nel codificare le forme del ragionamento deduttivo (Boole scrisse un libro dal titolo piuttosto esagerato 'Le leggi del pensiero').

Gottlob Frege a Jena e Giuseppe Peano a Torino lavoravano per abbinare il ragionamento formale allo studio degli insiemi e dei numeri. David Hilbert a Gottinga elaborò una formalizzazione della geometria che andava oltre quella euclidea.

Nel frattempo (attorno al 1880) si sviluppava la teoria degli insiemi, con Georg Cantor. Questa teoria era molto attraente ancorché non intuitiva, ma presto vennero alla luce nuovi paradossi. Il più famoso è il paradosso di Russel (considerate la classe degli insiemi che non contengono se stessi come elementi: p. es. l'insieme delle cassette da frutta: chiamiamoli Insiemi Ordinari IO; considerate gli insiemi che contengono se stessi come elementi (sono un poco più strani): per esempio l'insieme di tutti gli insiemi, oppure l'insieme di tutte le cose eccetto Giovanna d'Arco: chiamiamoli non-IO. Battezziamo K l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi (l'insieme di tutti gli IO): l'insieme K è un insieme IO o non-IO? Ecco la contraddizione: se proviamo a dire che è un insieme IO, allora contiene se stesso, e quindi è un non-IO. Viceversa se affermiamo che è un non-IO.)

Esiste una formulazione 'linguistica' del paradosso, che ci aiuta a capire quanto tale paradosso sia generale, detta paradosso di Grelling. Dividiamo gli aggettivi della lingua italiana in due categorie: quelli che descrivono se stessi, come 'sdrucciolo', 'breve', 'esa-sillabico', e quelli che non descrivono se stessi, come 'commestibile', 'lungo', 'incompleto'. I primi sono auto-descrittivi: li chiamiamo, con un aggettivo, 'autologici'; i secondi sono non-auto-descrittivi; li chiamiamo 'eterologici'. Il paradosso è condensato nella domanda: 'eterologico' è 'eterologico'?

In questo contesto storico si colloca la pubblicazione, tra il 1910 ed il 1913, dei 'Principia Mathematica', ad opera di Bertrand Russel e Alfred North Whitehead, il cui obiettivo potremmo condensare nel proposito di estromettere ogni possibilità di paradosso dalla logica, dalla teoria degli insiemi e dall'aritmetica. L'obiettivo era dunque di derivare tutta la matematica dalla logica, senza contraddizioni.

Hilbert suggerì ai colleghi matematici una sfida: dimostrare rigorosamente che il sistema definito nei 'Principia Matematica' era sia coerente (cioè non conteneva contraddizioni) sia completo (tale cioè che ogni enunciato vero dell'aritmetica potesse essere derivato all'interno della struttura di ragionamento dei Principia stessi).

Nel 1931 Kurt Gödel pubblicò un lavoro 'Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei 'Principia Mathematica' e di sistemi affini' in cui compariva un teorema, che si può parafrasare così: 'Tutte le assiomatizzazioni coerenti dell'aritmetica contengono proposizioni indecidibili'. Il risultato di questo lavoro era che il sistema dei 'Principia Mathematica' è incompleto, ossia vi sono enunciati veri dell'aritmetica che i metodi di dimostrazione del sistema non possono dimostrare. E questo risultato si estende ad ogni sistema assiomatico che pretendesse di raggiungere gli stessi risultati.

Quali sono i motivi per cui vi ho raccontato tutta questa storia? Intanto per notare come arrivati ad un certo punto si tende a ripensare la natura profonda del proprio lavoro, sia nel campo dell'arte, sia nel campo della matematica. E, se volete, che il messaggio che ci viene dal teorema di incompletezza di Gödel è che i paradossi e le contraddizioni sono insiti nel ragionamento anche formalizzato, e sono fonte di crescita piuttosto che motivo di depressione, e anche questo accomuna campi estremamente diversi tra loro.

Riferimenti bibliografici

- aa. vv., 2000: *Arte povera in Collezione*, Charta, Milano.
- aa. vv., 2007: *Enciclopedia Biografica Universale*, Treccani/La Repubblica, Roma.
- Abate, M., 2006: Il girasole di fibonacchi, *Matematica e Cultura 2006*, M. Emmer, ed.
- Accame, G. M., 1990: *Arico'. L'inquietudine della ragione*, Electa, Milano.
- Accame, G. M., ed., 2004: *Saffaro. Le forme del pensiero*, Edizioni Aspasia, Bologna.
- Benjamin, W., 1982: Pittura e grafica, *Metafisica della gioventu'. Scritti 1910-1918*, Einaudi, Torino, p. 202.
- Bernardini, C., 2007: *Prima lezione di fisica*, Laterza, Bari, cat. 877.
- Bernardini, C. and T. DeMauro, 2003: *Contare e raccontare. Dialogo sulle due culture*, Laterza, Bari.
- Bertozzi, M., 2007: *Il quadrato. Tesi di laurea, Accademia di belle arti, Bologna*.
- Bois, Y.-A. and R. Krauss, 2003: *L'informe*, Bruno Mondadori, Milano.
- D'Ancona, P., 1959: *Paolo Uccello*, Silvana Editoriale d'Arte, Milano.
- Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, 1969: *La fisica di Feynman*, vol. II, Addison Wesley, London.
- Foster, H., R. Krauss, Y.-A. Bois, and B. Buchloch, 2006: *Arte dal 1900*, Zanichelli, Bologna, trad. ital.
- Gerstner, K., 2006: L'estetica che nasce dallo spirito della geometria, *Max Bill, pittore, scultore, architetto, designer*, T. Buchsteiner and O. Letze, eds., Electa, Milano, pp. 124–127.
- Hofstadter, D. R., 1984: *Goedel, Escher, Bach: una eterna ghirlanda brillante*, Adelphi, Milano.
- Hua, B. L. and P. Klein, 1998: An exact criterion for the stirring properties of nearly two-dimensional turbulence. *Physica D*, **113**, 98–110.
- Krauss, R., 1998: *Passaggi. Storia della scultura da Rodin alla Land Art*, Bruno Mondadori, Milano.
- Paiano, R. and F. Poli, 2007: *Hidetoshi Nagasawa*, Damiani, Bologna, cat. 887.
- Poli, F., 1995: *Minimalismo, Arte povera, Arte concettuale*, Laterza, Bari.
- Poli, F., 2005: Premessa, *Conservare l'arte contemporanea*, O. Chiantore and A. Rava, eds., Electa, Milano.
- Raeburn., M., ed., 2004: *Il cubismo. Rivoluzione e tradizione*, Ferrara Arte, Ferrara.
- Ricci, G., 1963: Aritmetica, *Enciclopedia della Scienza e della Tecnica*, E. Macorini, ed., vol. II, Mondadori, pp. 19–24.
- Saffaro, L., 2001: Poliedri eleganti, *Matematica e Cultura 2001*, M. Emmer, ed.

Schneckenburger, M., 2000: Sculpture, *Art of the 20th Century*, I. F. Walther, ed., Taschen, Koeln, p. 456.

Vettese, A., 1998: *Capire l'arte contemporanea*, Umberto Allemandi, Torino.

Weber, G. J. M., 2001: La liberta' di un pittore di vedute: Bernardo bellotto a dresda, *Bernardo Bellotto. 1722-1780*, B. A. Kowalczyk and M. DaCorta'Fumei, eds., Electa, Milano, pp. 20-21.

Zelevansky, L., ed., 2004: *Beyond geometry. Experiments in form, 1940s-70s*, The MIT Press, Cambridge.

Zuffi, S., 1997: *La pittura italiana*, Electa, Milano.